Il suffit donc de démontrer :

propé : Toute fonction sigmoïdale qui est mesurable et bornée est discriminatoire.

En particulier, toute sigmoïdale continue est discriminatoire.

preuve : Pour tout x, y, θ, φ, on a :

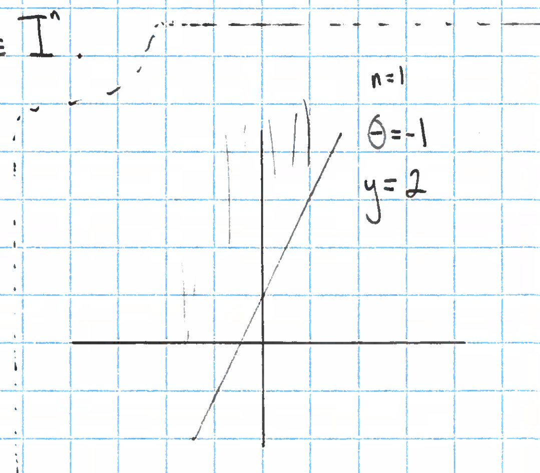
$$\sigma(\lambda(y^T x + \theta) + \varphi) \begin{cases} \longrightarrow 1 & \text{pour } y^T x + \theta > 0, \text{ quand } \lambda \to \infty \\ \longrightarrow 0 & \text{-"- } y^T x + \theta < 0, \text{ quand } \lambda \to -\infty \\ = \sigma(\varphi) & \text{pour } y^T x + \theta = 0, \ \forall \lambda. \end{cases}$$

Ainsi, les fonctions

$$\sigma(\lambda(y^T x + \theta) + \varphi) \xrightarrow[(\lambda \to \infty)]{} \gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y^T x + \theta > 0 \\ 0 & y^T x + \theta < 0 \\ \sigma(\varphi) & y^T x + \theta = 0 \end{cases}$$

De plus, $\forall y, \theta, \varphi$, $\exists M$ t.q. $|\sigma| \leq M$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in I^n$.

Soit $\begin{cases} \Pi_{y,\theta} & \text{l'hyperplan } \{x : y^T x + \theta = 0\} \\ H_{y,\theta} & \text{le half-space } \{x : y^T x + \theta > 0\} \end{cases}$



On veut m.q. σ discriminatoire, i.e. que si $\int_{I^n} \sigma \, d\mu = 0$, alors $\mu \equiv 0$.

On suppose donc : $0 = \int_{I^n} \sigma_\lambda(x) \, d\mu(x)$ et

$$0 = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{I^n} \sigma_\lambda(x) \, d\mu(x) = \int_{I^n} \gamma(x) \, d\mu(x)$$

$$= \sigma(\varphi) \cdot \mu(\Pi_{y,\theta}) + \mu(H_{y,\theta}), \quad \text{pour tout } \varphi, \theta, y.$$

Or, puisque $\sigma(\varphi) \not\equiv 0$, $\sigma(\varphi) \not\equiv$ cst, cela implique $\mu(\Pi_{y,\theta}), \mu(H_{y,\theta}) = 0, \ \forall y, \theta$.

Si $\mu \geq 0$, cela impliquerait $\mu \equiv 0$, mais pas ici

On fixe y. Étant donnée une fct mesurable $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, on définit la fonctionnelle

$$F(h) = \int_{I^n} h(y^T x) \, d\mu(x).$$

L est une fonctionnelle bornée sur $L^\infty(\mathbb{R})$ car μ est finie. On choisit

$$h = \mathbb{I}_{[\theta,\infty]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\theta,\infty] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Alors,}$$

$$F(h) = \int_{I^n} h(y^T x) \, d\mu = \mu(\Pi_{y,-\theta}) + \mu(H_{y,-\theta}) = 0.$$

$$\left(y^T x \geq \theta \iff y^T x - \theta \geq 0 \right)$$

Soit $\mathbb{I}_{[a,b]} = \mathbb{I}_{[a,\infty)} - \mathbb{I}_{(b,\infty)}$. Par linéarité de l'intégrale

$$F(\mathbb{I}_{[a,b]}) = F(\mathbb{I}_{[a,\infty)}) - F(\mathbb{I}_{(b,\infty)}) = 0 \;; \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}.$$

Donc, $F=0$ pour toute fonction simple $u = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{I}_{(a_i,b_i)}$

Or, ces fonctions sont denses dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et donc $F \equiv 0$.

- En particulier, puisque sin, cos sont bornées, on a :

$$0 = F(\cos + i\sin) = \int_{I^n} \cos(y^T x) + i\sin(y^T x)\, d\mu(x)$$

$$= \int_{I^n} e^{iy^T x}\, d\mu(x) \quad , \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Donc, le transformée de Fourier de μ est identiquement nulle et donc $\mu \equiv 0$. $\blacksquare$

<u>thm</u> (Hornik ; '91)

$S = \{G(x)\}$, $G(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\, \sigma(y_j^T x + \theta_j)$

- $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\sigma \not\equiv$ cst. Alors, $\bar{S} = L^p(\mu)$, $\forall$ mesure finie μ.
- $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$. Alors, S est dense dans $C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^n$, compact. (Cybenko)
- $\sigma \in C^m(\mathbb{R}^k)$, alors $\bar{S} = C^m(\mathbb{R}^k)$

α : Hölder : $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha$, $\forall\, x,y$.

$C^{k,\alpha}(\Omega)$: k dérivées continues ; k-ème dérivée est α-Hölder continue.